Aufgabe 1

gegeben: x, y, z seien Elemente eines Hauptidealrings R.

zu zeigen: wenn $\mathrm{ggT}(x,y) = \mathrm{ggT}(x,z) = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{ggT}(x,yz) = 1$

Beweis:

Da R ein Hauptidealring ist, erfüllt er die Voraussetzungen für das Korollar 8.8. Nach diesem Korollar ist

$$\mathrm{ggT}(x,y) = 1 \;\Leftrightarrow \exists\, r_1, r_2 \in R : 1 = r_1 x + r_2 y$$

bzw.

$$\mathrm{ggT}(x,z) = 1 \;\Leftrightarrow \exists\, r_1', r_2' \in R : 1 = r_1' x + r_2' z.$$

Aus $1 = r_1 x + r_2 y$ und $1 = r_1' x + r_2' z$ folgt

$$\begin{aligned}
1 = 1 \cdot 1 = (r_1 x + r_2 y)(r_1' x + r_2' z) &= r_1 r_1' x^2 + r_1' r_2 xy + r_1 r_2' xz + r_2 r_2' yz \\
&= (r_1 r_1' x + r_1' r_2 y + r_1 r_2' z)x + r_2 r_2' yz \\
&= \big(r_1'(r_1 x + r_2 y) + r_1 r_2' z\big)x + r_2 r_2' yz \\
&= (r_1' + r_1 r_2' z)x + r_2 r_2' yz \\
&= \big(r_1' + r_1(1 - r_1' x)\big)x + r_2 r_2' yz \\
&= (r_1' + r_1 - r_1 r_1' x)x + r_2 r_2' yz
\end{aligned}$$

und damit unter Anwendung des Korrolars 8.8, da $r_1' + r_1 - r_1 r_1' x,\; r_2 r_2' \in R$

$$\mathrm{ggT}(x, yz) = 1. \blacksquare$$

Aufgabe 2

gesucht: die Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ für jedes quadratfreie $n \in \mathbb{N}$

Lösung:

Nach Aufgabenblatt 9, Aufgabe 4.2. ist

$$a + b\sqrt{-n} = x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^* \;\Leftrightarrow\; N(x) = a^2 + b^2 n = \pm 1.$$

Nach Voraussetzung ist $n > 0$, also muß sogar

$$N(x) = a^2 + b^2 n = 1 \tag{1}$$

gelten.

$n = 1$: Die Gleichung (1) wird zu $a^2+b^2 = 1$, und hat als ganzzahlige Lösungen nur $(a, b) = (\pm 1, 0)$ und $(a, b) = (0, \pm 1)$.

Folglich ist

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^* = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}.$$

$n > 1$: Die einzigen Lösungen für $a^2 + b^2 n = 1$ sind $(a, b) = (\pm 1, 0)$, da bereits $b^2 n > 1$ für $b \neq 0$.

In diesem Fall ist also

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^* = \{\pm 1\}.$$

Aufgabe 3

gegeben: R sei ein euklidischer Ring mit Gradfunktion $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, aber kein Körper.

zu zeigen: $\exists\, u \in R \setminus (R^* \cup \{0\}) : \ \forall\, x \in R \ \exists\, y \in R^* \cup \{0\} : u \mid (x - y)$

Beweis:

Ich betrachte die Menge

$$M = \big\{\delta(z) \mid z \in R \setminus (R^* \cup \{0\})\big\} \ \subset \mathbb{N}.$$

Da R kein Körper ist, ist M nichtleer. Wegen $M \subset \mathbb{N}$ ist M nach unten beschränkt, und besitzt also ein kleinstes Element (mit der üblichen Ordnung in $\mathbb{N}$). Das kleinste Element sei mit $\delta(u)$ bezeichnet, es ist $u \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$, unser festes u.
Sei $x \in R$ beliebig. Nach Definition des euklidischen Rings gibt es dann ($u \neq 0$) $y, z \in R$ mit $x = uy + z$ und $z = 0$ oder $\delta(z) < \delta(u)$.
Aus $z = 0$ folgt $u \mid x$, was die Behauptung (für $y = 0$) erfüllt. Für $z \neq 0$ folgt wegen der Minimalität von $\delta(u)$ $z \notin R \setminus (R^* \cup \{0\})$, also $z \in R^*$, mit $u \mid (x - z)$, was die Behauptung erfüllt. ∎

Aufgabe 4

gegeben:

$$R_{19} = \left\{ a + b\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

(1) zu zeigen: R_{19} ist ein Ring.

Wir haben

$$R_{19} = \left\{ a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\},$$

also

$$R_{19} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{-19}] \subset \mathbb{C}.$$

R_{19} ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ich weise die Ringeigenschaft über das Unterringkriterium nach.

Seien $x, y \in R_{19}$, $x = a_1 + b_1\frac{1+\sqrt{-19}}{2}$, $y = a_2 + b_2\frac{1+\sqrt{-19}}{2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x - y &= a_1 + b_1\frac{1+\sqrt{-19}}{2} - a_2 + b_2\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \\ &= a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)\frac{1+\sqrt{-19}}{2}, \end{aligned}$$

$x - y \in R_{19}$, und

$$xy = \left(a_1 + b_1\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right)\left(a_2 + b_2\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= a_1a_2 + a_2b_1\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + a_1b_2\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + b_1b_2\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \\ &= a_1a_2 + (a_2b_1 + a_1b_2)\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + b_1b_2\frac{(1+\sqrt{-19})^2}{4} \\ &= a_1a_2 + (a_2b_1 + a_1b_2)\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + b_1b_2\frac{-18+2\sqrt{-19}}{4} \\ &= a_1a_2 + (a_2b_1 + a_1b_2)\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + b_1b_2\frac{-9+\sqrt{-19}}{2} \\ &= a_1a_2 - 5b_1b_2 + (a_2b_1 + a_1b_2 + b_1b_2)\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \qquad (2) \end{aligned}$$

und $xy \in R_{19}$. Damit ist R_{19} ein Ring, als Unterring von $\mathbb{C}$.

(2) gesucht: die Einheiten von R_{19}

Ich definiere die Normfunktion $N : R_{19} \to \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
N(x) = N\left(a + b\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right) &:= \left|\left(a + b\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right)\right|^2 \\
&= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{19}}{2}\right)^2 \\
&= a^2 + \frac{b^2}{4} + ab + \frac{19b^2}{4} \\
&= a^2 + ab + 5b^2. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Mit $y = a' + b'\frac{1+\sqrt{-19}}{2}$ wird

$$N(x)N(y) = (a^2 + ab + 5b^2)(a'^2 + a'b' + 5b'^2)$$

$$= a^2a'^2 + aba'^2 + 5b^2a'^2 + a^2a'b' + aba'b' + 5b^2a'b' + a^25b'^2 + ab5b'^2 + 25b^2b'^2 \qquad (4)$$

Mit (2) und (3):

$$N(xy) = (aa' - 5bb')^2 + (aa' - 5bb')(a'b + ab' + bb') + 5(a'b + ab' + bb')^2$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2a'^2 + 25b^2b'^2 - 10aa'bb' + aa'a'b + aa'ab' + aa'bb' - 5bb'a'b - 5bb'ab' - 5bb'bb' \\
&\quad + 5a'^2b^2 + 5a^2b'^2 + 5b^2b'^2 + 10a'bab' + 10a'bbb' + 10ab'bb' \\
&= a^2a'^2 + 25b^2b'^2 + aa'a'b + aa'ab' + aa'bb' + 5bb'a'b - 5bb'ab' - 5bb'bb' \\
&\quad + 5a'^2b^2 + 5a^2b'^2 + 5b^2b'^2 + 10ab'bb' \\
&= a^2a'^2 + 25b^2b'^2 + aa'a'b + aa'ab' + aa'bb' + 5bb'a'b + 5bb'ab' \\
&\quad + 5a'^2b^2 + 5a^2b'^2 \\
&= a^2a'^2 + 25b^2b'^2 + aa'^2b + a^2a'b' + aa'bb' + 5b^2b'a' + 5abb'^2 \\
&\quad + 5a'^2b^2 + 5a^2b'^2
\end{aligned}
$$

und Vergleich der Summanden mit (4) zeigt, daß

$$N(xy) = N(x)N(y),$$

N ist multiplikativ. Weiterhin ist

$$N(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,$$

N ist positiv definit. Wir erhalten $x \in R_{19}^* \;\Leftrightarrow N(x) = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; a^2 + ab + 5b^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \pm 1, b = 0$, somit $R_{19}^* = \{\pm 1\}$.