Aufgabe 1

gegeben: R sei ein kommutativer Ring, I, J seien Ideale in R, P Primideal.

zu zeigen: $IJ \subset P \ \Rightarrow \ I \subset P \vee J \subset P$

Beweis:

Ich führe den Beweis indirekt. Angenommen, die rechte Seite der Implikation gilt nicht. Dann gibt es ein $a \in I \setminus P$ und ein $b \in J \setminus P$. Es ist also $a, b \notin P$. Jedoch ist $ab \in IJ$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, zur linken Seite der Implikation. Da P ein Primideal ist, würde aus $ab \in IJ \subset P$ nämlich $a \in P$ oder $b \in P$ folgen.

Aufgabe 2

Voraussetzung: R sei ein kommutativer Ring mit Eins, $S \subset R \setminus \{0\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge, $S \neq \emptyset$. I sei ein maximales Element in $\{J \text{ ist Ideal in } R \text{ und } J \cap S = \emptyset\} =: M$

Behauptung: I ist prim.

Beweis:

Seien $a, b \in R$ mit $ab \in I$. Angenommen, $a, b \notin I$. $I + aR, I + bR$ sind als Summe von Idealen ebenfalls Ideale. Wegen $a \notin I$ gilt $I \subsetneqq I + aR$, aufgrund der Maximalität von I ist $I + aR \notin M$, folglich ist $I + aR \cap S \neq \emptyset$. Wegen Symmetrie gilt $I + bR \cap S \neq \emptyset$. Ich betrachte nun Elemente aus diesen nichtleeren Durchschnitten: es gibt $s_1, s_2 \in S$ mit $s_1 \in I + aR, s_2 \in I + bR$, also gibt es $i_1, i_2 \in I$ und $r_1, r_2 \in R$ mit $s_1 = i_1 + ar_1, s_2 = i_2 + br_2$. S ist multiplikativ abgeschlossen, also ist $s_1 s_2 \in S$ und damit $S \ni (i_1 + ar_1)(i_2 + br_2) = i_1 i_2 + ar_1 i_2 + i_1 br_2 + abr_1 r_2$. Dies ist aber ein Element von I, weil $i_1, i_2, ab \in I$. Wir erhalten $I \cap S \neq \emptyset$ und damit einen Widerspruch. Es gilt also $a \in I$ oder $b \in I$, daher ist I prim.

Aufgabe 3

gegeben: R sei ein kommutativer Ring mit Eins, $\forall\, x \in R : x^2 = x$

(a) zu zeigen: $\forall\, x \in R : x + x = 0$

Es gibt ein Einselement $1 \in R$, also gilt für beliebiges $x \in R$ auch $x + 1 \in R$. Weiterhin ist nach Voraussetzung auch x+1 idempotent:

$$x + 1 = (x+1)^2 \tag{1}$$

$$= (x+1)(x+1)$$

unter Verwendung der Distributivität

$$= (x+1)x + (x+1)1$$

$$= x^2 + x + x + 1$$

und da x idempotent

$$= x + x + x + 1$$

und Zurückblicken auf (1) zeigt, daß $x + x = 0$.

(b) zu zeigen: $R^* = \{1\}$

Sei $x \in R^*$. Da x multiplikativ invertierbar ist, gibt es ein $y \in R$ mit

$$xy = 1, \tag{2}$$

Multiplikation mit y ergibt

$$xy^2 = y.$$

Da y nach Voraussetzung idempotent ist, folgt

$$xy = y,$$

und Vergleich mit (2) ergibt $y = 1$, und somit $x = 1$, also $R^* = \{1\}$.

(c) zu zeigen: $|R/P| = 2$ für jedes Primideal P von R

Sei P ein Primideal von R. Seien $0 \neq \overline{x}, \overline{y} \in R/P$ beliebig, und bezeichne

$$\overline{z} := \overline{xy} \tag{3}$$

deren Produkt, $\overline{z} \in R/P$. Multiplikation von (3) von links mit $\overline{x}$ liefert

$$\overline{xz} = \overline{xxy},$$

und da x idempotent ist:

$$\overline{xz} = \overline{xy},$$

$$\overline{xz} - \overline{xy} = 0,$$

$$\overline{x}(\overline{z} - \overline{y}) = 0,$$

Nach Satz 6.8 ist R/P ein Integritätsring, also nullteilerfrei. Da $x \neq 0$, muß $\overline{z} - \overline{y} = 0$ gelten, also ist $\overline{z} = \overline{y}$. Wegen Symmetrie ist dann auch $\overline{z} = \overline{x}$, es folgt $\overline{x} = \overline{y}$. R/P kann außer der 0 also nur ein weiteres Element enthalten, es gilt $|R/P| = 2$.

Aufgabe 4

gegeben: R sei ein Integritätsring mit Eins.

2) zu zeigen: Ist in R jede absteigende Kette von Hauptidealen stationär, dann ist R ein Körper.

Angenommen, der Integritätsbereich mit Eins R ist kein Körper. Dann ist R multiplikativ nicht abgeschlossen, es existiert also ein $x \in R \setminus \{0\}$, das nicht invertierbar ist. Ich betrachte die Kette von Hauptidealen

$$(1) \supset (x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \cdots$$

Diese Kette wird nicht stationär: Angenommen, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(x^n) = (x^{n+1})$. Da R kommutativ mit Eins ist, kann ich dies schreiben als $x^n R = x^{n+1} R$. Dann existert ein $r \in R$ mit $x^n = x^{n+1} r$. In einem Integritätsbereich gilt die Kürzungsregel (wegen der Nullteilerfreiheit), und es ist $x \neq 0$, also wäre $1 = xr$, dies ist ein Widerspruch, da x nicht invertierbar ist. Folglich wird die Kette nicht stationär.

Gezeigt ist also: wenn R kein Körper ist, dann existiert eine absteigende Kette von Hauptidealen, welche nicht stationär wird. Daraus folgt die Behauptung.