Aufgabe 1

Voraussetzung: G ist abelsche Gruppe, G besitzt eine Kompositionsreihe

Behauptung: G ist endlich

Beweis:

G beitze also eine Kompositionsreihe

$$G = G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}.$$

Eine Kompositionsreihe ist eine Normalreihe, deren Faktoren einfache Gruppen sind. Dann ist also G_{m-1} einfach, sowie alle Faktoren G_i/G_{i+1} für $i \in \{1, \ldots, m-2\}$.

Eine Gruppe H ist einfach, wenn $H, \{e\}$ die einzigen Normalteiler von H sind. In abelschen Gruppen ist jede Untergruppe ein Normalteiler. Ist H abelsch und einfach, dann besitzt es nur die Untergruppen $H, \{e\}$. Damit ist H also zyklisch, und von Primzahlordnung $|H| = p$, da 1 und p die einzigen Teiler der Gruppenordnung sind.

Für die Faktoren gilt also mit dem Satz von Lagrange

$$|G_i| = |G_i/G_{i+1}||G_{i+1}| = p_i|G_{i+1}| \tag{1}$$

mit p_i Primzahl, $i \in \{1, \ldots, m-2\}$, und $|G_{m-1}| = p_{m-1}$ Primzahl.

Wir haben mit wiederholter Anwendung von (1)

$$|G| = |G_1| = |G_1/G_2||G_2| = p_1|G_2|,$$

$$|G_2| = |G_2/G_3||G_3| = p_2|G_3|, \ldots$$

und somit

$$|G| = |G_1 : G_2| \cdots |G_{m-2} : G_{m-1}||G_{m-1}| = p_1 p_2 \ldots p_{m-2} p_{m-1},$$

die Ordnung der Gruppe G ist ein endliches Produkt von Primzahlen, daher ist $|G| < \infty$, G ist endlich. ■

Aufgabe 3

zu zeigen: In $2\mathbb{Z}$ ist $4\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal.

Beweis:

Aus der Vorlesung, Abschnitt Gruppentheorie, ist bereits bekannt, daß $4\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $2\mathbb{Z}$ ist (z.B. aus der Normalreihe für $(\mathbb{Z}, +)$).

Nun zeige ich, daß $4\mathbb{Z}$ zusätzlich die Idealeigenschaft in $2\mathbb{Z}$ besitzt:

Sei $a \in 4\mathbb{Z}, r \in 2\mathbb{Z}$. Dann existieren $x_a, x_r \in \mathbb{Z}$ mit $a = 4x_a, r = 2x_r$. Weiterhin ist, unter der Benutzung der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$:

$$ra = 2x_r 4x_a = 8x_r x_a = 4(2x_r x_a) \in 4\mathbb{Z} \tag{2}$$

und

$$ar = 4x_a 2x_r = 8x_a x_r = 4(2x_a x_r) \in 4\mathbb{Z}, \tag{3}$$

(3) folgt natürlich ohnehin aus (2) und der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$.
Damit ist $4\mathbb{Z}$ ein Ideal in $2\mathbb{Z}$. Zu zeigen verbleibt die Maximalität:

Angenommen, es gäbe ein $4\mathbb{Z}$ enthaltendes echtes Ideal I in $2\mathbb{Z}$, also

$$4\mathbb{Z} \subset I \subsetneq 2\mathbb{Z},$$

dann muß insbesondere I eine echte Untergruppe von $2\mathbb{Z}$ sein. Aus der Gruppentheorie wissen wir, daß die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ die Form $k\mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$, haben, insbesondere haben die Untergruppen von $2\mathbb{Z}$ die Form $2k\mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$. Die einzige echte Untergruppe von $2\mathbb{Z}$ welche $4\mathbb{Z}$ enthält, ist $4\mathbb{Z}$ selbst. Also ist $I = 4\mathbb{Z}$, und es ist gezeigt, daß $4\mathbb{Z}$ maximal ist in $2\mathbb{Z}$. ■

Aufgabe 4

gegeben: R sei ein assoziativer Ring mit 1.

gesucht: Alle 2-seitigen Ideale in $M_{2\times 2}(R)$

Lösung:

Meine Rechnung ergab: Eine Teilmenge $I \subset M_{2\times 2}(R)$ ist genau dann ein 2-seitiges Ideal in $M_{2\times 2}(R)$, wenn die Menge

$$I_R = \{r \in R \mid r \text{ ist Eintrag einer Matrix aus } I\} \tag{4}$$

ihrer Einträge ein Ideal in R ist.
Es ist also $I = M_{2\times 2}(I_R)$ genau für Ideale I_R in R.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ : Sei I ein Ideal in $M_{2\times 2}(R)$. Dann ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$, also ist $0 \in I_R$.

Bezeichnen im weiteren

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es gilt $E_{ij} \in M_{2\times 2}(R)$ für $i \in \{1,2\}$, da $0, 1 \in R$ nach Voraussetzung.

Seien $r_1, r_2 \in I_R$. Dann existieren nach (4) Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in I, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in I$$

mit $a_{ij} = r_1$ und $b_{kl} = r_2$ für gewisse $i, j, k, l \in \{1,2\}$.

Da I ein zweiseitiges Ideal in $M_{2\times 2}(R)$ ist, gilt $F := AE_{jl} - E_{ik}B \in I$. Bezeichne $C = (c_{ij})$ die Matrix AE_{jl}, dann ergibt sich bei der Matrixmultiplikation $c_{il} = a_{ij} = r_1$. Sei $D = (d_{ij})$ die Matrix $E_{ik}B$, dann ergibt sich bei der Matrixmultiplikation $d_{il} = b_{kl} = r_2$, also für $F = (f_{ij}) = C - D$ wird $f_{jl} = r_1 - r_2$, es folgt $r_1 - r_2 \in I_R$.

Bezeichne nun

$$D_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

die Diagnonalmatrix mit Einträgen r auf der Hauptdiagonalen, es gilt $D_r \in M_{2\times 2}(R)$ für $r \in R$.

Da I ein zweiseitiges Ideal in $M_{2\times 2}(R)$ ist, muß $D_r A \in I$ gelten, also gilt $ra_{ij} = rr_1 \in I_R$. Analog muß $AD_r \in I$ gelten, e folgt $a_{ij}r = r_1 r \in I_R$.

Somit ist I_R ein Ideal in R.

„ $\Leftarrow$ “ : Sei I_R ein Ideal in R, und bezeichne $I := M_{2\times 2}(I_R)$. Dann gilt $0 \in I_R$, also auch $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in I, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in I.$$

Dann ist

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 & a_4 - b_4 \end{pmatrix},$$

da I_R ein Ideal in R ist, liegen alle Elemente der Differenz-Matrix in I_R, und wir haben $A - B \in I$.

Sei außerdem

$$C = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R).$$

beliebig. Dann ist

$$AC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 r_1 + a_2 r_3 & a_1 r_2 + a_2 r_4 \\ a_3 r_1 + a_4 r_3 & a_3 r_2 + a_4 r_4 \end{pmatrix}$$

und

$$CA = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 a_1 + r_2 a_3 & r_1 a_2 + r_2 a_4 \\ r_3 a_1 + r_4 a_3 & r_3 a_2 + r_4 a_4 \end{pmatrix}$$

Da $a_i \in I_R, r_j \in R$ für $i, j \in \{1, 2\}$ und I_R zweiseitiges Ideal in R ist, folgt $AC, CA \in I$. Also ist I ein Ideal in $M_{2\times 2}(R)$.