Aufgabe 1

gesucht: die Elemente von S_n mit der Ordnung 2

Lösung:

Wir betrachten die kanonische Faktorisierung einer Permutation $\pi \in S_n$: jede Permutation $\pi \neq e_{S_n}$ ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt elementfremder Zyklen darstellbar.

Die Ordnung eines r-Zykels ist gleich r. Tritt ein r-Zykel als ein Faktor der kanonischen Faktorisierung der Permutation π auf, so ist r ein Teiler der Ordnung von π.

Folglich besitzt die kanonische Faktorisierung von Permutationen der Ordnung 2 nur 2-Zykeln, also Transpositionen, als Elemente.

Ist andererseits eine Permutation π als Produkt elementfremder Transpositionen darstellbar, so ist $\pi^2 = e_{S_n}$, denn jede dieser Transpositionen hat die Ordnung 2, und damit auch ihr Produkt.

Ergebnis:

Die Elemente von S_n mit der Ordnung 2 sind genau die Permutationen, welche als Produkt elementfremder Transpositionen darstellbar sind.

Aufgabe 2

zu zeigen: In S_n sind alle Zykeln einer festen Länge r zueinander konjugiert

Beweis:

Hilfssatz: Für eine Transposition $(i,j) \in S_n$ und eine Permutation $\pi \in S_n$ gilt

$$\pi(i,j)\pi^{-1} = \big(\pi(i), \pi(j)\big). \tag{1}$$

Beweis des Hilfssatzes: Wir haben

$$\pi(i,j)\pi^{-1}(k) = \begin{cases} \pi\pi^{-1}(k) = k & \text{falls } \pi^{-1}(k) \notin \{i,j\} \\ \pi(i) & \text{falls } \pi^{-1}(k) = j \;\Leftrightarrow k = \pi(j) \\ \pi(j) & \text{falls } \pi^{-1}(k) = i \;\Leftrightarrow k = \pi(i) \end{cases}$$

wir haben einen 2-Zyklus, und es folgt (1).

Folgerung: Da die Konjugation $g \mapsto \pi g \pi^{-1}$ ein Automorphismus ist, gilt nach (1) sogar für beliebige Zyklen $(i_1, \ldots, i_r) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{r-1} i_r)$:

$$\begin{aligned} \pi(i_1, \ldots, i_r)\pi^{-1} &= \pi\big((i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{r-1}, i_r)\big)\pi^{-1} \\ &= \big(\pi(i_1, i_2)\pi^{-1}\big)\big(\pi(i_2, i_3)\pi^{-1}\big) \ldots \big(\pi(i_{r-1}, i_r)\pi^{-1}\big) \\ &= \big(\pi(i_1), \pi(i_2)\big)\big(\pi(i_2), \pi(i_3)\big) \ldots \big(\pi(i_{r-1}), \pi(i_r)\big), \end{aligned}$$

also

$$\pi(i_1, \ldots, i_r)\pi^{-1} = \big(\pi(i_1), \ldots, \pi(i_r)\big). \tag{2}$$

Seien nun $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$ und $\beta = (j_1, \ldots, j_r)$ zwei beliebige Zykeln aus S_n mit der Länge r.

Weiterhin sei $\pi \in S_n$ definiert durch:

$$\pi(i_k) := \begin{cases} j_k, & i \in \{1, \ldots, r\} \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Mit Hilfe von (2) errechnet sich

$$\pi\alpha\pi^{-1} = \pi(i_1, \ldots, i_r)\pi^{-1} = \big(\pi(i_1), \ldots, \pi(i_r)\big) = (j_1, \ldots, j_r) = \beta,$$

und die r-Zykel α, β sind konjugiert, mittels in (3) definiertem π. ■

Aufgabe 3

gegeben: $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_n), \alpha$ überführt alle Transpositionen in Transpositionen

zu zeigen: α ist innerer Automorphismus

Beweis:

Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen. Daher ist es hinreichend, die Bilder von Transpositionen unter α zu betrachten.

Seien a, b, c, d beliebige, jedoch paarweise verschiedene Elemente. Laut Voraussetzung ist

$$\alpha\big((a, b)\big) = (a', b'), \quad \alpha\big((a, c)\big) = (a'', c').$$

Nehmen wir an, a', b', a'', c' seien paarweise verschieden, d.h. $(a', b'), (a'', c')$ wären elementfremde Zyklen, dann hätten wir

$$\mathrm{ord}\ (a', b')(a'', c') = 2,$$

jedoch ist

$$\mathrm{ord}\ (a', b')(a'', c') = \mathrm{ord}\ \alpha\big((a, b)(a, c)\big) = \mathrm{ord}\ \alpha\big((b, a, c)\big) = 3,$$

wir haben einen Widerspruch. Somit haben zwei Bilder von Transpositionen $(a, \cdot)$ stets ein Element gemeinsam.

Ich zeige noch, daß sie stets das erste Element a' gemeinsam haben: nehmen wir an, es wäre nicht so, dann hätten wir einen Fall

$$\alpha\big((a, b)\big) = (a', b'), \quad \alpha\big((a, c)\big) = (a', c'), \quad \alpha\big((a, d)\big) = (c', d').$$

Dann folgt

$$2 = \mathrm{ord}\ (b', a') = \mathrm{ord}\ (a', b')(b', c')(a', c') = \mathrm{ord}\ \alpha\big((a, b)(a, d)(a, c)\big)$$

$$= \mathrm{ord}\ \alpha\big((a, c, d, b)\big) = 4,$$

und Widerspruch. Je zwei Bilder von Transpositionen $(a, \cdot)$ haben das erste Element a' gemeinsam. Mit dem Beweisargument der Symmetrie gilt dies auch für die Betrachtung des zweiten Elements: Je zwei Bilder von Transpositionen $(\cdot, b)$ haben das zweite Element b' gemeinsam.

Nun betrachten wir die Abbildung

$$\pi : a \mapsto a'.$$

π ist injektiv, denn

$$\pi(a) = \pi(b) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\big((a,b)\big) = (\pi(a), \pi(b)) = (1),$$

damit

$$(a,b) = (1), \quad a = b.$$

π ist surjektiv, denn weil π injektiv ist und eine Menge mit endlich vielen Elementen in sich abbildet, muß jedes Element auch als Bild auftreten. π ist also bijektiv, und wir haben

$$\pi \in S_n.$$

Wegen

$$\alpha\big((a,b)\big) = (\pi(a), \pi(b)) = \pi(a,b)\pi^{-1}, \tag{4}$$

siehe Hilfssatz in der Lösung zu Aufgabe 2, mit $\pi \in S_n$. Wie eingangs erwähnt ist jede Permutation als Produkt von Transpositionen darstellbar, und da α ein Automorphismus ist, überträgt sich (4) auf Produkte von Transpositionen, und α ist damit ein innerer Automorphismus von S_n.

Aufgabe 4

gegeben: $S(\mathbb{N})$ bezeichne die Menge der Bijektionen von $\mathbb{N}$,
$G = \{f \in S(\mathbb{N}) \mid f(m) \neq m$ nur für endlich viele $m \in \mathbb{N}\}$

1. zu zeigen: G ist ein Normalteiler in $S(\mathbb{N})$

   Da $f \in S(\mathbb{N})$ nur endlich viele Elemente aus $\mathbb{N}$ verändert, und alle anderen bei ihrem Wert beläßt, ist $f \in G$ genau dann, wenn es sich darstellen läßt als ein endliches Produkt von Zyklen endlicher Länge.

   Sei $g \in S(\mathbb{N})$ beliebig. Die Konjugation mit g auf einen endlichen Zyklus z, also gzg^{-1}, liefert wieder einen endlichen Zyklus, siehe auch den Beweis aus Aufgabe 2, Hilfssatz bzw. Folgerung.

   Daher ist gfg^{-1} wieder als endliches Produkt endlicher Zyklen darstellbar, und somit ist $gfg^{-1} \in G$, und G ist ein Normalteiler in $S(\mathbb{N})$.

2. zu zeigen: G wird von der Menge $M = \big\{(1,i) \mid i \in \mathbb{N}\big\}$ erzeugt

   Nach 1. ist $f \in G$ als endliches Produkt endlicher Zyklen darstellbar. Jeder endlicher Zyklus ist als endliches Produkt von Transpositionen darstellbar, daher ist f darstellbar als Produkt von endlich vielen Transpositionen.

   Eine beliebige Transposition (i,j), $i \neq j$, läßt sich schreiben als

   $$(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i),$$

   d.h. jede Transposition läßt sich als Produkt von Elementen aus M darstellen. Folglich läßt sich jedes $f \in G$ als Produkt von Elementen aus M darstellen: G wird von M erzeugt.

3. zu zeigen: G ist nicht endlich erzeugt

   Annahme: G wäre endlich erzeugt:

   $$G = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Für jedes $f_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert nach Voraussetzung ein M_i, so daß $f_i(m) = m$ für alle $m > M_i$. Sei $M := \max\big\{M_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$, dann ist für alle $f_i \in G$ und für alle $m > M \quad f_i(m) = m$.

   Es folgt $(1, M{+}1) \notin G$, mit Aufgabenteil 2. ergibt sich ein Widerspruch.

   Damit kann G nicht endlich erzeugt sein.