Aufgabe 1

gegeben: G sei endliche Gruppe, jede Untergruppe von G sei ein Normalteiler von G

zu zeigen: je zwei Elemente teilerfremder Ordnung kommutieren

Beweis:

Seien also $a, b \in G$ mit $\operatorname{ggt}\big(\operatorname{ord}(a), \operatorname{ord}(b)\big) = 1$. Der Schnitt der von a und b erzeugten zyklischen Untergruppen $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ ist ebenfalls eine Untergruppe von G, denn der Schnitt zweier Untergruppen ist ebenfalls eine Untergruppe. Es ist sogar $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ eine Untergruppe sowohl von $\langle a\rangle$ als auch von $\langle b\rangle$ aus demselben Grund.

Eine Folgerung aus dem Satz von Lagrange ist, daß die Ordnung einer Untergruppe einer Gruppe G ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ ist. Es folgen

$$\big|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle\big| \;\mid\; \big|\langle a\rangle\big|,$$
$$\big|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle\big| \;\mid\; \big|\langle b\rangle\big|,$$

und da die Ordnungen der von a und b erzeugten Untergruppen nach Voraussetzungen teilerfremd sind, ist

$$\big|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle\big| = 1,$$

es folgt

$$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}. \tag{1}$$

Nach Voraussetzung sind $\langle a\rangle$ und $\langle b\rangle$ Normalteiler von G, daher haben wir

$$aba^{-1} \in \langle b\rangle, \quad ba^{-1}b^{-1} \in \langle a\rangle \quad (\text{denn } a^{-1} \in \langle a\rangle)$$

und damit

$$aba^{-1}b^{-1} \in \langle a\rangle \cap \langle b\rangle,$$

und wegen (1) ist

$$aba^{-1}b^{-1} = e,$$
$$ab = ba,$$

und die beiden Elemente a und b kommutieren.

Aufgabe 2

gesucht: Beschreibung der Bahnen der SO(2) im $\mathbb{R}^2$

Die spezielle orthogonale Gruppe SO(2) ist die Gruppe aller 2×2-Matrizen A mit

$$\det(A) = 1 \tag{2}$$

und

$$AA^t = A^t A = E. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) haben wir für SO(2) eine Darstellung

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \tag{4}$$

denn mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

ist wegen (3)

$$A^{-1} = A^t,$$

wegen (2) ist

$$\det(A) = ad - bc = 1,$$

wir haben als inverse Matrix

$$A^{-1} = \big(\det(A)\big)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

Koefizientenvergleich mit A^t ergibt

$$a = d, \; c = -b,$$

$$\det(A) = a^2 + b^2 = 1$$

und wir erhalten (4).

Für die Operation der Matrix $A \in \mathrm{SO}(3)$ wie in (4) auf einen Vektor x gilt

$$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ -bx_1 + ax_2 \end{pmatrix},$$

für die Länge eines Vektors x nach Anwendung der Operation Ax gilt damit

$$|Ax| = \sqrt{(ax_1 + bx_2)^2 + (-bx_1 + ax_2)^2}$$
$$= \sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + 2ax_1bx_2 + b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - 2ax_1bx_2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)x_1^2 + (a^2 + b^2)x_2^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x|.$$

Die gewöhnliche Operation der speziellen orthogonalen Gruppen läßt also Längen invariant, ebenso Winkel zwischen Vektoren. Die Operationen entsprechen insbesondere Drehungen im $\mathbb{R}^2$, da die Determinante $+1$ ist.

Wir haben also

$$\forall\, A \in \mathrm{SO}(2):\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2 : |Ax| = |x|,$$

die Bahn eines $x \in \mathbb{R}^2$ ist also eine Teilmenge der Sphäre (des Kreises)

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}.$$

Sei umgekehrt ein $y \in S_x$ mit $|y| = |x|$ gegeben, dann hat y den gleichen Abstand zum Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ wie x, und kann daher durch eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ in x überführt werden, also durch eine Operation von $\mathrm{SO}(2)$. D.h. S_x ist eine Teilmenge der Bahn von x.

Wir erhalten also, daß die Bahn eines Elementes x unter der Operation der $\mathrm{SO}(2)$ gleich der Sphäre S_x ist. $\mathbb{R}^2$ wird in disjunkte Bahnen S_x zerlegt, welche Sphären/Kreisen mit Radius $|x|$ und Mittelpunkt 0 entsprechen. Insbesondere ist die Bahn des Punktes $0 \in \mathbb{R}^2$ gleich $\{0\}$, da $A0 = 0\ \forall\, A \in \mathrm{SO}(2)$.

Aufgabe 3

(1) Bahnen der SO(3) im $\mathbb{R}^3$

Die spezielle orthogonale Gruppe SO(3) ist die Gruppe aller 3×3-Matrizen A mit

$$\det(A) = 1$$

und

$$AA^t = A^t A = E.$$

Die gewöhnliche Operation der speziellen orthogonalen Gruppen läßt Längen invariant, sie entsprechen Drehungen im $\mathbb{R}^3$.

Wir haben also

$$\forall\, A \in \mathrm{SO}(3) :\ \forall\, x \in \mathbb{R}^3 : |Ax| = |x|,$$

die Bahn eines $x \in \mathbb{R}^3$ ist also eine Teilmenge der Sphäre

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| = |x|\}.$$

Sei umgekehrt ein $y \in S_x$ mit $|y| = |x|$ gegeben, dann hat y den gleichen Abstand zum Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ wie x, und kann daher durch eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ in x überführt werden, also durch eine Operation von SO(3). D.h. S_x ist eine Teilmenge der Bahn von x.

Wir erhalten also, daß die Bahn eines Elementes x unter der Operation der SO(3) gleich der Sphäre S_x ist. $\mathbb{R}^3$ wird in disjunkte Bahnen S_x zerlegt, welche Sphären mit Radius $|x|$ und Mittelpunkt 0 entsprechen. Insbesondere ist die Bahn des Punktes $0 \in \mathbb{R}^3$ gleich $\{0\}$, da $A0 = 0\ \forall\, A \in \mathrm{SO}(3)$.

(2) Stabilisator des Basisvektors e_1

Der Stabilisator vom Basisvektor e_1 ist die Menge aller Rotationen aus SO(3), welche diesen Vektor fest lassen. Daher sind dies die Drehungen um e_1 als Drehachse, damit alle Drehungen in der Ebene, welche durch e_2, e_3 aufgespannt wird.

Formal: einer Rotation um die e_1-Achse um den Winkel φ entspricht die Rotationsmatrix

$$R_{e_1,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

damit haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}(3)_{e_1} &= \{A \in \mathrm{SO}(3) : Ax = x\} = \{R_{e_1,\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

und mit der bekannten Darstellung der SO(2):

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

erhalten wir

$$\mathrm{SO}(3)_{e_1} \cong \mathrm{SO}(2).$$

(3) Fixpunkte unter der gesamten Gruppe

Der einzige Punkt, welcher bei sämtlichen Drehungen invariant bleibt, ist der Nullpunkt.

Aufgabe 4

(1) **zu zeigen:** $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ mittels

$$t(x,y) =)\big(t,(x,y)\big) \mapsto \left(tx, \frac{y}{t}\right) \tag{6}$$

Beweis:

Wir haben nach der Voraussetzung eine Abbildung $(\mathbb{R}^*, \cdot) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Nach (6) ist für beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\big(1,(x,y)\big) \mapsto \left(1x, \frac{y}{1}\right) = (x,y). \tag{7}$$

- Weiterhin ist für beliebige $t_1, t_2 \in (\mathbb{R}^*, \cdot), (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$t_1\big(t_2(x,y)\big) = t_1\left(\left(t_2 x, \frac{y}{t_2}\right)\right) = \left(t_1 t_2 x, \frac{y}{t_1 t_2}\right)\Bigg) = (t_1 t_2)(x,y). \tag{8}$$

Nach (7) und (8) operiert $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^2$ mittels (6).

(2) **gesucht:** die Bahnen unter der Operation (6)

Die Bahn eines Elements $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\mathbb{R}^*_{(x,y)} = \big\{(tx, y/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^*\big\}.$$

Wir haben die Bahnen:

- für $(x, y) = (0, 0)$: $\mathbb{R}^*_{(0,0)} = \{(0, 0)\}$, 0 ist invariant bezüglich Multiplikation und Division.
- für $x = 0, y \neq 0$: $\mathbb{R}^*_{(0,y)} = \big\{(0, y/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^*\big\}$; die y-Achse ohne den Nullpunkt. Jeder Punkt $(0, \widetilde{y})$ der y-Achse ohne $(0, 0)$ taucht als Bildpunkt auf, für ein $t = y/\widetilde{y}$.
- für $x \neq 0, y = 0$: $\mathbb{R}^*_{(x,0)} = \big\{(x, 0/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^*\big\}$; die x-Achse ohne den Nullpunkt. Jeder Punkt $(\widetilde{x}, 0)$ der x-Achse ohne $(0, 0)$ taucht als Bildpunkt auf, für ein $t = \widetilde{x}/x$.
- für $x \neq 0, y \neq 0$: $\mathbb{R}^*_{(x,y)} = \big\{(x, y/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^*\big\}$; das sind die Hyperbeln definiert durch

  $$\widetilde{x}\widetilde{y} = xy,$$

  denn für jeden dieser Punkte $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ gilt

  $$\widetilde{x} = tx, \quad \widetilde{y} = \frac{y}{t}$$

  mit

  $$t = \frac{y}{\widetilde{y}} = \frac{\widetilde{x}}{x} \neq 0, \tag{9}$$

  für jedes t bleibt unter der Operation (6) das Produkt der xy konstant, d.h. das Produkt der Koordinaten des Ursprungsvektors ist gleich dem Produkt der Koordinaten des Bildvektors unter der Operation, also etwas anders geschrieben:

  $$\mathbb{R}^*_{(x,y)} = \big\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \widetilde{x}\widetilde{y} = c, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}.$$

  Die Bildpunkte liegen auf diesen Hyperbeln, und jeder Punkt $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ dieser Hyperbeln ist auch ein Bild unter dieser Operation mit durch (9) definiertem t.