Aufgabe 1

a) **zu zeigen:** $Z(G)$ ist ein Normalteiler in G

Nach Definition des Zentrums ist

$$\begin{aligned} Z(G) &= \{h \in G \mid hg = gh \;\forall\, g \in G\}, \\ &= \{h \in G \mid hgh^{-1} = g \;\forall\, g \in G\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Nachweis, daß $Z(G) \subseteq G$ eine Untergruppe ist:

Das neutrale Element e der Gruppe G ist auch Element von $Z(G)$, denn es gilt nach dessen Definition $eg = ge \;\forall\, g \in G$.
Seien $a, b \in Z(G)$. Dann ist wegen (1) unter Verwendung des Assoziativgesetzes für alle $g \in G$

$$(ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = (ga)b = g(ab),$$

es folgt $ab \in Z(G)$.
Weiterhin ist nach Regel für das Inverse eines Produktes und nach (1)

$$a^{-1}g = (g^{-1}a)^{-1} = (ag^{-1})^{-1} = ga^{-1},$$

es folgt $a^{-1} \in Z(G)$. Also ist $Z(G)$ eine Untergruppe von G.

Nachweis, daß $Z(G)$ die Normalteiler-Eigenschaft hat:

Sei $z \in Z(G)$, und sei weiterhin $g \in G$ ein beliebiges Element der Gruppe G. Dann ist nach (1)

$$gzg^{-1} = (gz)g^{-1} = (zg)g^{-1} = z(gg^{-1}) = ze = z,$$

also besteht die Inklusion

$$gZ(G)g^{-1} \subseteq Z(G),$$

betrachte ich statt g das Element $g^{-1} \in G$, erhalte ich

$$g^{-1}Z(G)g \subseteq Z(G),$$

zusammengefaßt

$$g^{-1}Z(G)g = Z(G),$$

und damit ist $Z(G)$ auch Normalteiler.

b) **zu zeigen:** Ist $G/Z(G)$ zyklisch, dann ist G abelsch

Nach bewiesenem Teil a) ist $Z(G)$ ein Normalteiler in G. Damit ist die Faktorgruppe $G/Z(G)$ definiert. Nach Voraussetzung von b) ist $G/Z(G)$ zyklisch, wird also von einem Element $gZ(g) \in G/Z(G)$ erzeugt. Die Elemente von $G/Z(G)$ sind dann die Potenzen der erzeugenden Nebenklasse $gZ(G)$. Für die Potenzen dieser Nebenklasse gilt nach der Faktorgruppenoperation

$$\big(gZ(G)\big)^i = g^i Z(G),$$

für die Faktorgruppe:

$$G/Z(G) = \langle gZ(G)\rangle = \big\{g^i Z(G) \mid i \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Die Gruppe G ist die Vereinigung der Linksnebenklassen :

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} g^i Z(G). \tag{2}$$

Seien nun $a, b \in G$ zwei beliebige Elemente von G. Wegen (2) existieren dann $i, j \in \mathbb{Z}$ sowie $z_1, z_2 \in Z(G)$ mit

$$a = g^i z_1, \quad b = g^j z_2.$$

Für die Verknüpfung von a und b gilt dann

$$ab = g^i z_1 g^j z_2$$

und weil z_1, z_2 im Zentrum liegen

$$= z_1 g^i g^j z_2 = z_1 g^j g^i z_2 = z_1 g^j z_2 g^i = g^j z_2 g^i z_1 = ba,$$

und es ist gezeigt, daß G abelsch ist.

c) **zu zeigen:** $\big[G : Z(G)\big]$ ist keine Primzahl

Annahme: $\big[G : Z(G)\big]$ wäre eine Primzahl p.

Nach a) ist $Z(G)$ Normalteiler von G, die Gruppe $G/Z(G)$ existiert und hat somit Primzahlordnung p. Als Gruppe mit Primzahlordnung muß $G/Z(G)$ zyklisch sein, denn die Ordnung jedes Elements teilt die Gruppenordnung, eine Primzahl hat nur die Teiler 1 und p, also muß ein Element $g \neq e$ die Ordnung p haben und somit die Gruppe $G/Z(G)$ erzeugen, daher ist $G/Z(G)$ zyklisch.

Nach b) ist dann G abelsch, sämtliche Elemente kommutieren, d.h.

$$G = Z(G). \tag{3}$$

Der Satz von Lagrange besagt in diesem Fall

$$|G| = \big[G : Z(G)\big]|Z(G)|,$$

zusammen mit (3) folgt

$$\big[G : Z(G)\big] = 1,$$

dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Somit kann $\big[G : Z(G)\big]$ keine Primzahl sein.

Aufgabe 2

gegeben: H sei direkter Faktor der Gruppe G.

zu zeigen: Jeder Normalteiler von H ist ein Normalteiler von G.

Beweis:

Die Gruppe G ist dann isomorph zum äußeren direkten Produkt von H mit einer weiteren Gruppe G':

$$G \overset{\varphi}{\cong} H \times G'$$

mit dem Isomorphismus

$$\varphi : G \xrightarrow{\cong} H \times G',$$

φ bildet ein Element von G ab mittels

$$g \mapsto (h', g'), \quad h' \in H, g \in G', \tag{4}$$

und φ bildet ein Element von $H \subseteq G$ ab mittels

$$\varphi(h) = (h', e_{G'}), \quad h' \in H, e_{G'} \in G'. \tag{5}$$

Nun betrachte ich einen Normalteiler N von H, sei $n \in N$, und wegen (5) ist $\varphi(n) = (n', e_{G'})$. Dann gilt nach Homomorphieeigenschaft von φ und nach (4),(5)

$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = (h, g')(n', e_{G'})(h, g')^{-1}$$

die Multiplikation erfolgt komponentenweise:

$$\begin{aligned} &= (hn', g'e_{G'}))(h, g')^{-1} = (hn', g'))(h, g')^{-1} = (hn'h^{-1}, g'g'^{-1}) \\ &= (hn'h^{-1}, e_{G'}) \end{aligned} \tag{6}$$

Weil N ein Normalteiler von H ist, gilt $hn'h^{-1} \in N$, das Ergebnis von (6) liegt im Bild von N, also ist $gng^{-1} \in N$, und N ist Normalteiler von G.

Aufgabe 3

gegeben: H sei Normalteiler der Gruppe G.

zu zeigen: H ist direkter Faktor von $G \Leftrightarrow\ \exists\,\varphi : G \xrightarrow{hom} H$, mit $\varphi_{|H}$ Isomorphismus.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Sei zunächst H ein direkter Faktor von G. Dann gibt es einen weiteren Normalteiler N von G, wobei G isomorph zum direkten Produkt von H und N ist:

$$G \overset{\psi}{\cong} H \times N \tag{7}$$

mit $\psi : G \xrightarrow{\cong} H \times N$. Bezeichne π_H die kanonische Projektion von $H \times N$ auf H, dann setze ich

$$\varphi := \pi_H \circ \psi. \tag{8}$$

Als Verknüpfung von Homomorphismen ist das in (8) definierte φ ein Homomorphismus, und wegen

$$\psi : G \to H \times N,$$

$$\pi_H : H \times N \to H$$

ist

$$\varphi : G \to H.$$

Ich betrachte nun $\varphi_{|H}$. $\varphi_{|H}$ ist ein Homomorphismus, weil es auf eine Untergruppe eingeschränkt ist, und sich daher die Homomorphieeigenschaft aus G überträgt.

$\varphi_{|H} : H \to H$ ist surjektiv: Sei $h \in H$ vorgegeben, dann hat es mindestens ein Urbild $h' \in H \times N$ unter der Projektion π_H, weil die Projektion surjektiv ist. Weiterhin hat h' ein Urbild unter ψ in G, nämlich $h'' := \psi^{-1}(h')$, da ψ ein Isomorphismus ist. Es gilt $\varphi(h'') = (\pi_H \circ \psi)(h'') = \pi_H(h') = h$, φ ist surjektiv.

$\varphi_{|H} : H \to H$ ist injektiv: $\ker(\pi_H) = \pi_H^{-1} e_H = \{(e_H, n) \mid n \in N\}$, und $\psi^{-1}(1, n) \in N$ nach (7). Das heißt, die Urbilder von e_H unter φ liegen in $N \subseteq G$. Weil H ein direkter Faktor ist und H, N ein inneres direktes Produkt bilden, ist $H \cap N = \{e_G\}$, somit ist $\ker(\varphi_{|H}) = H \cap N = \{e_G\} = \{e_H\}$, und $\varphi_{|H}$ ist injektiv.

„$\Leftarrow$“: Für die Rückrichtung sei nun angenommen, $\varphi : G \to H$ sei ein Homomorphismus, und seine Einschränkung $\varphi_{|H}$ auf $H \subseteq G$ ein Isomorphismus. $\ker(\varphi) =: N$ ist eine Untergruppe, als Kern eines Homorphismus ist N ein Normalteiler von G.

$$x \in H \cap N \;\Rightarrow\; \varphi(x) = e_H, \quad \text{da } x \in N = \ker(\varphi),$$

und weil $\varphi_{|H}$ ein Isomorphismus ist, gilt nun $x = e_H$, also

$$H \cap N = \{e_H\}. \tag{9}$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß man jedes Element $g \in G$ als Produkt $g = hn$ von Elementen aus H und N darstellen kann.

Für alle $g \in G$ gilt $\varphi(g) \in H$. Da die Einschränkung $\varphi_{|H}$ ein Isomorphismus sein soll, ist $\varphi_{|H}^{-1}$ ein Isomorphismus von H nach $H \subseteq G$. Somit ist $h := (\varphi_{|H}^{-1} \circ \varphi)(g) = \varphi_{|H}^{-1}\big(\varphi(g)\big) \in H \subseteq G$.

Nun zeige ich, daß es ein $n \in N$ gibt mit $g = hn$, also daß $h^{-1}g \in N$:

$$\varphi(h^{-1}g) = \varphi\Big(\varphi_{|H}^{-1}\Big(\big(\varphi(g)\big)^{-1}\Big)g\Big) = \varphi\Big(\varphi_{|H}^{-1}\Big(\big(\varphi(g)\big)^{-1}\Big)\Big)\varphi(g)$$

wegen Homomorphieeigenschaft von φ,

$$= \big(\varphi(g)\big)^{-1}\varphi(g) = e_H,$$

also liegt $h^{-1}g$ im Kern von φ, somit ist gezeigt, daß $h^{-1}g \in N$, und wir haben die gesuchte Darstellung $g = hn$ mit $h \in H, n \in N$.

Zusammen mit (9) ist die Rückrichtung bewiesen.

Aufgabe 4

gegeben: $\mathbb{C}^* = \big(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot\big)$,
I_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln

gesucht: ein Isomorphismus $\mathbb{C}^*/I_n \cong \mathbb{C}^*$

Lösung:

Ich untersuche die Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

Bekanntlich ist φ ein Homomorphismus ($\varphi(z_1)\varphi(z_2) = z_1^n z_2^n = (z_1 z_2)^n = \varphi(z_1 z_2)$, denn $\mathbb{C}^*$ ist kommutativ). Der Kern von φ ist

$$\ker(\varphi) = \{z \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = e_{\mathbb{C}^*}\} = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\},$$

nämlich die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln I_n.

Die Gleichung

$$z^n = g$$

ist für alle Elemente $g \in \mathbb{C}^*$ lösbar in $\mathbb{C}^*$, daher ist φ surjektiv.

Als Kern des Homomorphismus φ ist I_n ein Normalteiler.

Nach dem Homomorphiesatz folgt

$$\mathbb{C}^*/\ker(\varphi) \cong \mathbb{C}^*,$$

also

$$\mathbb{C}^*/I_n \cong \mathbb{C}^*.$$

Ich betrachte somit die Faktorgruppe $\mathbb{C}^*/I_n$, und die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}^*/I_n &\to \mathbb{C}^* \\ zI_n &\mapsto z^n \end{aligned}$$

ψ ist der gesuchte Isomorphismus.