Aufgabe 1

gegeben: U, G Gruppen, $U \leq G$, $|G : U| = 2$
zu zeigen: $U \trianglelefteq G$

Beweis:

$|G : U|$ ist nach Definition die Anzahl der Linksnebenklassen (gleich der Anzahl der Rechtsnebenklassen) von U in G. Es gibt nach Voraussetzung nur 2 Linksnebenklassen von U in G, das bedeutet, G zerfällt in 2 disjunkte Linksnebenklassen zu U:

$$G = U \cup gU, \quad \text{mit einem } g \in G, \ U \cap gU = \emptyset,$$

für die andere Linksnebenklasse $U' := gU$ gilt also

$$U' = gU = G \setminus U.$$

Da es ebenso nur zwei Rechtsnebenklassen von U in G gibt, ist auch

$$G = U \cup Ug, \quad \text{mit einem } g \in G, \ U \cap Ug = \emptyset,$$

für die andere Rechtsebenklasse Ug gilt also

$$Ug = G \setminus U = U'.$$

Zu beweisen ist:

$$\forall\, x \in G \text{ gilt: } xUx^{-1} = U$$

Ich mache eine Fallunterscheidung:

$x \in U$: da U selbst Gruppe ist, gilt $x^{-1} \in U$. Weiterhin, da U abgeschlossen gegenüber der Gruppenoperation ist, und $x \in U$, folgt $xU = U$. Aus selbem Grund gilt $Ux^{-1} = U$, und damit zusammengefaßt $xUx^{-1} = U$.

$x \notin U$: Dann liegt x in der anderen Linksnebenklasse: $x \in G \setminus U = U'$,
und es gilt $xU \neq U$, denn die Nebenklassen sind disjunkt, somit $xU = U'$.
Ebenso muß x auch in der anderen Rechtsnebenklasse $\neq U$ liegen,
also gilt ebenfalls $Ux \neq U$, und damit auch $Ux = U'$.
Daraus folgt $xU = Ux$, die äquivalente Charakterisierung eines Normalteilers, also $xUx^{-1} = U$. ■

Aufgabe 2

gegeben: G sei Gruppe, jedes Element hat die Ordnung ≤ 2
zu zeigen: G ist abelsch

Beweis:

Das einzige Element g einer Gruppe, das die Ordnung $\operatorname{ord}(g) = 1$ hat, ist nach Definition das neutrale Element $g^1 = e = g$.

Für ein beliebiges $g \in G$, das die Ordnung 2 hat, gilt nach Definition der Ordnung

$$g^2 = e, \tag{1}$$

und wenn ich das Inverse anmultipliziere:

$$g = ge = g(gg^{-1}) = (gg)g^{-1} = g^2 g^{-1} = eg^{-1} = g^{-1},$$

nach (1), also zusammengefaßt, und da auch $ee = e$, also $e = e^{-1}$,

$$g = g^{-1} \quad \forall\, g \in G. \tag{2}$$

Seien nun $a, b \in G$ beliebige Elemente von G. In Übungsblatt 1, Aufgabe 1, wurde nachgewiesen, daß dann

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \tag{3}$$

Da G als Gruppe abgeschlossen bezüglich der Gruppenoperation ist, gilt $ab \in G$, und wenn ich nun (2) auf $g := ab$ anwende, erhalte ich

$$ab = (ab)^{-1},$$

und wegen (3)

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \tag{4}$$

wegen (2) ist $b^{-1} = b$ und $a^{-1} = a$, und (4) wird zu

$$ab = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

damit ist gezeigt, daß G abelsch ist.

Siehe dazu auch noch folgende Seite.

Zusatz:

Ich habe mir noch einen Beweis überlegt, welcher die auf Blatt 1 Aufgabe 1 bewiesene Eigenschaft des Inversen eines Produkts nicht verwendet:

Ich setze bei (2) fort, es seien $a, b \in G$ beliebige Elemente von G. Dann ist nach (2):

$$ab = (ab)^{-1},$$

$$(ab)(ab) = e,$$

Linksmultiplikation mit a:

$$a(ab)(ab) = ae = a,$$

$$a^2bab = a.$$

Nach (1) ist dann

$$bab = a,$$

Rechtsmultiplikation mit b:

$$bab^2 = ab,$$

Nach (1) folgt

$$ba = ab,$$

und G ist abelsch.

Aufgabe 3

gesucht: alle Gruppen der Ordnung ≤ 4

Lösung:

<u>Ordnung 1:</u>

Diese Gruppe kann nur 1 Element haben, nämlich das neutrale Element e, was in jeder Gruppe enthalten ist.

Verknüpfungstafel:

	e
e	e

Eine zyklische Gruppe der Ordnung 1, z.B. als Z_1 bezeichnet, als symmetrische Gruppe auch als S_1 bekannt.

<u>Ordnung 2:</u>

Diese Gruppe hat 2 Elemente. Das neutrale Element, was in jeder Gruppe enthalten ist, gehört natürlich dazu, sowie ein weiteres anderes Element a.
Das Inverse zu a muß in der Gruppe auch enthalten sein, es kann nicht das neutrale Element sein, also ist $a^{-1} = a$, $aa = e$, es ergibt sich die Verknüpfungstafel:

	e	a
e	e	a
a	a	e

Wir haben hier die zyklische Gruppe der Ordnung 2, unter der Bezeichnung Z_2 bekannt, sowie als symmetrische Gruppe unter dem Namen S_2.

<u>Ordnung 3:</u>

Diese Gruppe hat 3 Elemente. Das neutrale Element, was in jeder Gruppe enthalten ist, sowie zwei weitere andere Elemente a, b.
Die Gruppe muß unter der Verknüpfung abgeschlossen sein, also muß das Element ab in der Gruppe enthalten sein. Es ist $ab \neq a$ und $a, b \neq b$, denn a und b sind beide vom neutralen Element e verschieden. Es folgt $ab = e$, und damit auch $ba = e$. Wir haben $aa \neq a$, $bb \neq b$, da a, b, vom neutralen Element verschieden sind. Weiterhin $aa \neq ab$ und $aa \neq ba$ wegen $a \neq b$, es folgt also $aa = bb = e$.
Wir erhalten die folgende Verknüpfungstafel:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Wir haben hier die zyklische Gruppe der Ordnung 3, unter der Bezeichnung Z_3 bekannt, sowie als symmetrische Gruppe unter dem Namen S_3.

Ordnung 4:

Diese Gruppe hat 4 Elemente. Das neutrale Element, was in jeder Gruppe enthalten ist, sowie drei weitere vom neutralen Element und untereinander verschiedene Elemente a, b, c.
Die Ordnung eines Elements ist stets Teiler der Gruppenordnung, wie aus der Vorlesung bekannt. Elemente einer Gruppe der Ordnung 4 können also die Ordnung 1,2,oder 4 besitzen. Betrachte nun zunächst den Fall, daß ein Element die Ordnung 4 besitzt.
Dies ist dann zwangsläufig die zyklische Gruppe Z_4 (da es nur 4 Elemente gibt, die dann Potenzen des Erzeugers sein müssen) mit der Verknüpfungstafel (o.B.d.A sei a das erzeugende Element):

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Nun betrachte ich den Fall, wo kein Element die Ordnung 4 besitzt. Die maximale Ordnung eines Elementes ist also 2. Nach der bewiesenen Aufgabe 2 ist diese Gruppe auch abelsch.

a, b, c haben nicht die Ordnung 1, da sie nicht das neutrale Element sind. Also haben a, b, c jeweils die Ordnung 2 und es gilt

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \tag{5}$$

Da a, b, c keine neutralen Elemente sind, erhalten wir (wie bei der Ordnung 2 begründet) $ab \neq a, ab \neq b, ab \neq e$ (wegen (5)), also $ab = c$ und analog $bc = a$ und $ac = b$, der Rest folgt durch die begründete Kommutativität.

Wir erhalten die folgende Verknüpfungstafel:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Dies ist die Diedergruppe D_2, sie wird auch Kleinsche Vierergruppe genannt, und ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 4

gegeben:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gesucht: die von I und J erzeugte Untergruppe

Lösung:

Bezeichne $\mathbb{Q} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die gesuchte Untergruppe.

Wir haben $I, J \in \mathbb{Q}, E \in \mathbb{Q}$,

$$I^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$IJ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =: K,$$

$$JI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -K,$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$I^4 = J^4 = K^4 = (-E)^2 = E,$$

$$IK = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -J,$$

$$JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = I,$$

$$KI = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J,$$

$$KJ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -I,$$

und damit folgende Multiplikationstafel für E, I, J, K ::

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	-E	K	-J
J	J	-K	-E	I
K	K	J	-I	-E

Die Rechnungen zeigten, daß die gesuchte Gruppe $\mathbb{Q}$ nur aus den Elementen $\pm E, \pm I, \pm J, \pm K$ besteht, also 8 Elementen. Die Matrix-Multiplikation als Verknüpfung dieser 8 Matrizen führt nicht aus der Gruppe $\mathbb{Q}$ heraus. Die gesuchte Gruppe hat somit die Ordnung 8. Die Rechenvorschriften sind durch die obige Multiplikationstabelle eindeutig bestimmt, das Produkt negativer Matrizen $-E, -I, -J, -K$ mit negativen oder positiven E, I, J, K ergibt sich in natürlicher Form. Zwecks Vollständigkeit tippe ich hier einmal die „große“ Gruppentafel:

	E	I	J	K	-E	-I	-J	-K
E	E	I	J	K	-E	-I	-J	-K
I	I	-E	K	-J	-I	E	-K	J
J	J	-K	-E	I	-J	K	E	-I
K	K	J	-I	-E	-K	-J	I	E
-E	-E	-I	-J	-K	E	I	J	K
-I	-I	E	-K	J	I	-E	K	-J
-J	-J	K	E	-I	J	-K	-E	I
-K	-K	-J	I	E	K	J	-I	-E

Damit ist die gesuchte Untergruppe bestimmt, durch Angabe ihrer Elemente sowie der Vorschriften zur Verknüpfung sämtlicher ihrer Elemente.