Aufgabe 1

1. zu zeigen: $(g^{-1})^{-1} = g \quad \forall\, g \in G, \quad G$ Gruppe

   Beweis: Aus dem Gruppenaxiom für das Linksinverse zu g haben wir
   $$g^{-1}g = e, \tag{1}$$
   und für das Linksinverse zu g^{-1}
   $$(g^{-1})^{-1}g^{-1} = e, \tag{2}$$
   Unter Verwendung des Assoziativgesetzes ist
   $$((g^{-1})^{-1}g^{-1})(gg^{-1}) = (g^{-1})^{-1}(g^{-1}g)g^{-1} = (g^{-1})^{-1}(eg^{-1}) = (g^{-1})^{-1}g^{-1},$$
   nach (1), und weil e neutrales Element ist. Nach (2) folgt nun
   $$((g^{-1})^{-1}g^{-1})(gg^{-1}) = e. \tag{3}$$
   Andererseits ist auch wegen (2)
   $$((g^{-1})^{-1}g^{-1})(gg^{-1}) = e(gg^{-1}) = gg^{-1}, \tag{4}$$
   wegen (2) und e neutrales Element, und aus (3) und (4) zusammen folgt $gg^{-1} = e$ und damit die Behauptung $g = (g^{-1})^{-1}$.

2. zu zeigen: $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} \quad \forall\, g, h \in G, \quad G$ Gruppe

   Beweis: Es ist mit Verwendung des Assoziativgesetzes und (1)
   $$(h^{-1}g^{-1})(gh) = h^{-1}(g^{-1}g)h = h^{-1}(eh) = h^{-1}h = e,$$
   und $h^{-1}g^{-1}$ ist also Linksinverses zu gh.

   Analog kann man auch zeigen, da Aufgabenteil 1 schon bewiesen ist,
   $$(gh)(h^{-1}g^{-1}) = g(hh^{-1})g^{-1} = g(eg^{-1}) = gg^{-1} = e.$$

Aufgabe 2

Zu zeigen: unter jeder der Voraussetzungen 1. bis 3. ist eine Gruppe G abelsch:

1. $\mathrm{Aut}(G) = \{id\}$:

   Annahme: G ist nicht abelsch. Dann existieren $a, b \in G$ mit $ab \neq ba$, also ist $aba^{-1} \neq b$. Für den inneren Automorphismus

   $$\mathrm{Aut}(G) \ni \Phi_a : G \to G \ , \ \Phi_a(x) = axa^{-1}$$

   folgt $\Phi_a \neq id$, Widerspruch. Somit muß G abelsch sein.

2. $\varphi : G \to G$ mit $x \mapsto x^2$ ist ein Homomorphismus:

   Die definierenden Eigenschaft für Homomorphismen besagt:

   $$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \ \ \forall\, a, b \in G. \tag{5}$$

   Anwendung der Voraussetzung 2. auf beiden Seiten ergibt $\forall\, a, b \in G$:

   $$(ab)^2 = a^2b^2,$$

   $$abab = aabb,$$

   Multiplikation mit a^{-1} von links ergibt:

   $$bab = abb,$$

   Multiplikation mit b^{-1} von rechts ergibt:

   $$ba = ab,$$

   und da dies für alle $a, b \in G$ gilt, ist G abelsch.

3. $\varphi : G \to G$ mit $x \mapsto x^{-1}$ ist ein Homomorphismus:

   Anwendung der Voraussetzung 3. auf beiden Seiten von (5) ergibt $\forall\, a, b \in G$:

   $$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

   Auf beiden Seiten wird das Inverse gebildet und die bewiesene Aufgabe 1.2 sowie 1.1 verwendet:

   $$ab = (a^{-1}b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} = ba,$$

   und G ist abelsch.

Aufgabe 3

Zu zeigen: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ ist eine Gruppe (mittels Cramerscher Regel)
Beweis:

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}) : \det A = 1\}$$

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z} \text{ und } \det A = 1\}$$

Die Gruppenoperation in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ ist die Matrixmultiplikation, für $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), AB = C = (c_{ij})$ mit:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \tag{6}$$

offensichtlich sind alle Elemente der Produktmatrix wieder ganzzahlig, da $\mathbb{Z}$ abgeschlossen ist bezüglich Addition und Multiplikation. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$. Somit ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bezüglich der Gruppenoperation abgeschlossen.

Die Matrixmultiplikation ist assoziativ: betrachte das Produkt der drei Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$: Sei zunächst $AB = X = (x_{ij})$ und $BC = Y = (y_{ij})$, dann ist nach (6)

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \tag{7}$$

und

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}, \tag{8}$$

Ich bilde nun $(AB)C = XC$ und erhalte für das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte mittels (6) aus (7) den Wert:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (a_{il} b_{lk}) c_{kj} \tag{9}$$

Bilde ich nun $A(BC) = AY$, so erhalte ich für das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte mittels (6) aus (8) den Wert:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} (b_{kl} c_{lj}) \tag{10}$$

Aufgrund der Kommutativität in $(\mathbb{Z},+)$ und damit der Vertauschbarkeit der Summanden stimmen (9) und (10) überein, daher ist $(AB)C = A(BC)$, und die Assoziativität ist nachgewiesen.

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ enthält ein neutrales Element, nämlich $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,
$\det(E_n) = 1$, denn für $A = (a_{ij}),\ E = (e_{ij}),\ C = (c_{ij}) = E_n A$ gilt nach (6):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} a_{kj} = e_{ii} a_{ij} = a_{ij},$$

für $C = (c_{ij}) = AE_n$ gilt nach (6):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} = a_{ij} e_{jj} = a_{ij}.$$

Nun überprüfe ich die Existenz des Inversen A^{-1}, dafür muß gelten

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} A^{-1} = E,$$

(Rechtsinverse sind nach Vorlesung auch Linksinverse), also, mit der Bezeichnung

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} a'_{1i} \\ a'_{21} \\ \dots \\ a'_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{ni} \end{pmatrix}. \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Die Cramersche Regel löst lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit n Gleichungen und n Unbekannten, A eine $n \times n$-Matrix, x, b Vektoren mit n Zeilen. Mit der Bezeichnung A_j für die Matrix, welche aus A durch Ersetzung der j-ten Spalte durch b entsteht, besagt die Cramersche Regel, daß die j-te Komponente x_j des Lösungsvektors x bestimmt ist mittels

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

dann zeigt die Anwendung der Cramerschen Regel, weil $\det A = 1$ ist, daß die Komponenten der Matrix A^{-1} alle ganzzahlig sind, denn auch die Determinantenberechnung von Matrizen liefert aus ganzzahligen Komponenten ganzzahlige Ergebnisse. Weiterhin ist aufgrund der Multiplikativität der Determinantenfunktion wegen

$$\det E = 1 = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A = \det A^{-1}$$

$\det A^{-1} = 1$. Daher ist das Inverse einer Matrix aus $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ wiederum in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ enthalten.

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 4

Problem: Gibt es eine Gruppe, welche die Vereinigung zweier echter Untergruppen ist?

Lösung:

Nehmen wir an, eine Gruppe G läßt sich als Vereinigung zweier echter Untergruppen U, V von G darstellen.

Also $G = U \cup V, \quad U, V < G, \quad U, V \subsetneq G$.
Es gibt dann Elemente $u, v \in G$ mit $u \in U \setminus V,\ v \in V \setminus U$. Da G eine Gruppe ist, muß $uv \in G$ sein. Wenn $uv \in U$, dann wäre $v = (u^{-1}u)v = u^{-1}(uv) \in U$, da $u^{-1} \in U$, weil U Untergruppe ist. Daher ist $uv \notin U$, es muß also $uv \in V$ sein, damit ist $u = u(vv^{-1}) = (uv)v^{-1} \in V$, da V Untergruppe ist und somit $v^{-1} \in V$, das führt zu einem Widerspruch.

Es kann also keine solche Gruppe geben.